

# UNE EXPLOITATION ETENDUE DES MODELES ANALYTIQUES POUR LES PROBLEMES D'INTERACTION SOL FONDATION

## ADVANCED USE OF ANALYTICAL MODELS FOR PRATICAL DESIGN OF SOIL FOUNDATION INTERACTION

Minh Tuan HOANG<sup>1</sup>, Antoine ABOUD<sup>1</sup>, Marine BLANCHET<sup>1</sup>, Fahd CUIRA<sup>1</sup>, Bruno SIMON<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Terrasol, Paris, France

**RÉSUMÉ** – Cet article présente une exploitation étendue des solutions analytiques usuelles dérivées de la théorie de l'élasticité. Les développements présentés permettent d'étendre le domaine d'application de ces solutions à des configurations complexes dont le traitement était jusque-là réservé à des modélisations numériques tri-dimensionnelles en éléments finis ou en différences finies : stratigraphie et chargement complexes, élasticité non-linéaire, interaction sol-radier, consolidation.

**ABSTRACT** – This article presents an advanced exploitation of the usual analytical solutions derived from the elasticity theory. The presented developments enable to extend the field of application of these solutions to complex configurations instead of three-dimensional numerical modelling: complex stratigraphy and loading, non-linear behaviour, soil-raft interaction, consolidation of clay soils.

### 1. Introduction

Dans la pratique courante, l'étude des problèmes d'interaction sol-fondation se base traditionnellement sur des solutions analytiques ou semi-analytiques dérivées de la théorie de l'élasticité (Boussinesq, Mindelin, Burmister, Poulos, etc.). La pertinence de ces solutions réside dans l'hypothèse d'un comportement pseudo-élastique du terrain, ce qui est justifié pour des niveaux de chargement n'excédant pas 30 à 50 % de la charge de rupture (ce taux de chargement étant par construction garanti pour une fondation correctement dimensionnée au sens des normes en vigueur, Frank et al. 2019). L'utilisation de ces solutions présente des avantages pratiques décisifs dans la mesure où elle permet d'accéder directement aux résultats clés (incrément de contrainte et de déplacement en n'importe quel point) et se révèle compatible avec les applications quotidiennes de l'ingénieur, amené généralement à explorer un grand nombre de cas de charges et de configurations. Cette utilisation pratique se heurte néanmoins à la difficulté de traiter certains types de configurations qui peuvent nécessiter le recours à des modélisations plus élaborées (par éléments finis ou en différences finies) : stratigraphie et chargement complexes, prise en compte des effets de non-linéarité du comportement du terrain (élasticité non-linéaire), interaction avec une fondation de rigidité intermédiaire (par exemple un radier ou un dallage), interaction avec l'eau interstitielle (consolidation) etc. Cet article présente quelques développements récents permettant de palier à ces difficultés. L'ensemble de ces développements a fait l'objet d'un programme informatique dénommé Tasseldo+ et intégrée à suite logicielle Foxta de Terrasol.

### 2. Extension du modèle de Boussinesq

#### 2.1 Solution de référence

On considère un massif élastique homogène isotrope soumis à l'application d'une charge ponctuelle  $Q$ . La variation des contraintes verticale  $\Delta\sigma_{zz}$  et horizontale  $\Delta\sigma_{xx}$  induites en un point  $M(x, y, z)$  situé à une distance  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  de  $Q$  est donnée par les expressions suivantes établies par Boussinesq (Terzaghi, 1943) :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{3z^3}{R^5} \quad \Delta\sigma_{xx} = \frac{Q}{2\pi} \left( \frac{3zx^2}{R^5} - (1-2\nu) \left( \frac{y^2}{R^2(R-z)^2} - \frac{x^2+z^2}{R^3(R-z)} \right) \right)$$

Le déplacement vertical  $u_z$  et horizontal  $u_x$  au point M est également donné par Boussinesq :

$$u_z = -\frac{(1+\nu)Q}{2\pi E} \left( \frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1-\nu)}{R} \right) \quad u_x = -\frac{(1+\nu)Q}{2\pi E} \left( \frac{zx}{R^3} + (1-2\nu) \frac{x}{R(R-z)} \right)$$

Où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du terrain. A noter que la variation de la contrainte horizontale  $\Delta\sigma_{yy}$  et le déplacement  $u_y$  s'obtiennent à partir des expressions de  $\Delta\sigma_{xx}$  et  $u_x$  en interchangeant  $x$  et  $y$ .

## 2.2 Intégration pour un chargement quelconque

A partir de la solution de référence de Boussinesq, une intégration, exacte ou approchée, permet d'établir la variation des contraintes et des déplacements induits sous le coin d'un chargement rectangulaire ou triangulaire. Pour les formes rectangulaires, de nombreuses solutions analytiques existent dans la littérature (par exemple celle de Steinbrenner, Terzaghi 1943). Pour une forme triangulaire (qui permet d'aborder plus aisément des configurations géométriques complexes), nous avons mené l'exercice d'intégration à l'aide de l'outil Wolfram de Mathematica. Les expressions, « volumineuses », issues de cette intégration ne sont volontairement pas présentées dans cet article.

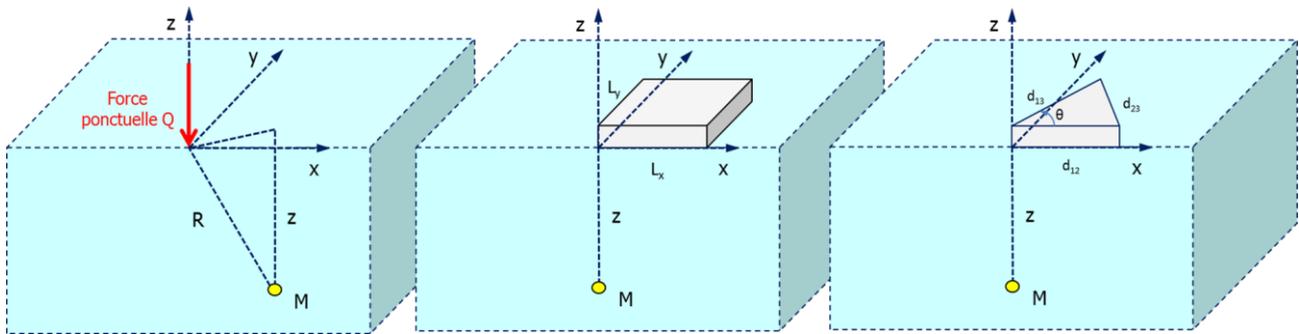


Figure 1. Intégration du modèle de Boussinesq : sous une charge ponctuelle (droite), sous le coin d'une charge rectangulaire (centre) ou triangulaire (droite).

A partir de ces solutions élémentaires, la méthode de superposition est ensuite utilisée pour sommer la variation de l'incrément de contrainte en tout point, pour tout chargement admissible. Pour le cas où le point de calcul se situe à l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle, le supplément d'une composante de contrainte en ce point est égal à la somme des suppléments de cette contrainte déduits sous les charges correspondantes respectivement aux rectangles ou triangles composés. Pour le cas où le point de calcul se situe à l'extérieur d'une charge, le principe de la combinaison linéaire est appliqué comme indiqué dans la figure ci-dessous. Ce principe s'applique à toutes les composantes des champs de contrainte et de déplacements.

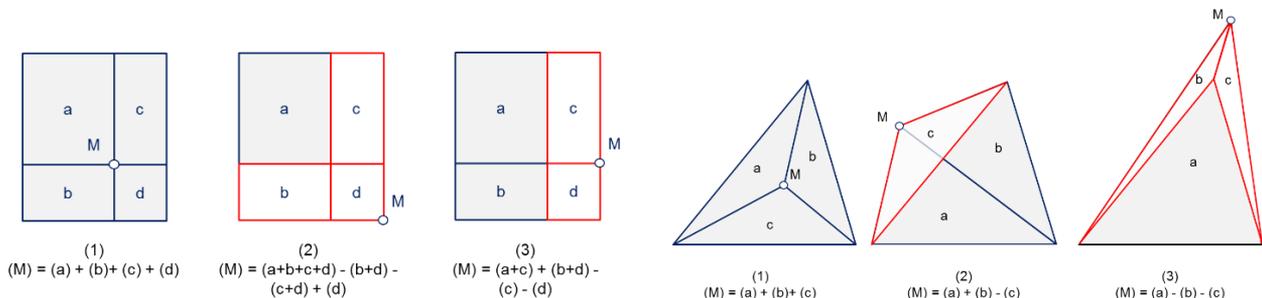


Figure 2. Méthode de superposition algébrique

### 2.3. Adaptation au cas d'une stratigraphie quelconque

La solution de Boussinesq a été établie à l'origine pour le cas d'un massif élastique homogène isotrope. Son extension au cas d'un multicouche est menée dans la pratique en admettant que les contraintes se propagent de la même façon dans le cas multicouche que dans le cas d'un terrain homogène. Cette hypothèse a été discutée d'une manière approfondie par Burland (1977) qui a conclu qu'elle était effectivement acceptable pour la majorité des situations courantes rencontrées par l'ingénieur. Une exception notable demeure le cas d'une couche très raide surmontant une couche plus déformable, où l'application du modèle de Boussinesq conduit à une estimation par excès des contraintes et des déplacements (ce qui demeure néanmoins du côté de la sécurité). Pour un massif de stratigraphie quelconque, que l'on peut définir à partir d'un réseau de sondages, l'utilisation du modèle de Boussinesq ainsi généralisé consiste à établir, au droit de chaque point de calcul, un profil « stratigraphique » sur la hauteur duquel on applique les solutions élémentaires du §2.1 (en considérant les modules et coefficients de Poisson des couches rencontrées). Ce profil stratigraphique peut être obtenu par interpolation entre les sondages à l'aide d'une fonction linéaire ou par triangulation de Delaunay.

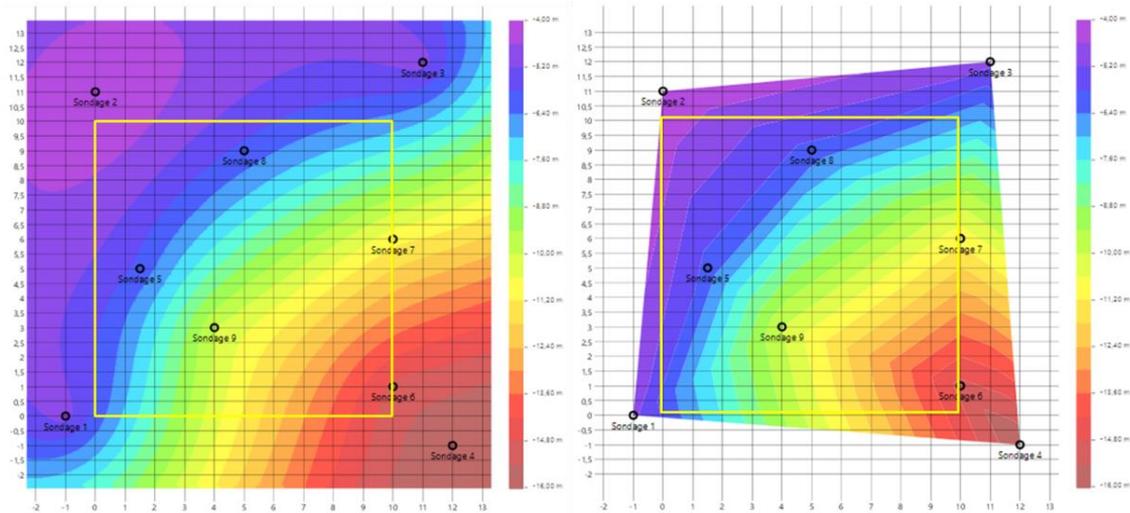


Figure 3. Résultat de l'interpolation radiale (gauche) et de l'interpolation surfacique (droite)

La figure suivante présente le résultat d'une étude comparative entre l'approche présentée et un traitement numérique en trois dimensions à l'aide du logiciel PLAXIS 3D. Le cas étudié est un réservoir de 90 m de diamètre fondé sur radier général et soumis à un chargement uniforme de 150 kPa. Le terrain de fondation est constitué d'une couche d'argile molle surmontant un terrain sableux moins déformable. L'épaisseur de la couche d'argile varie fortement sur l'emprise du réservoir.

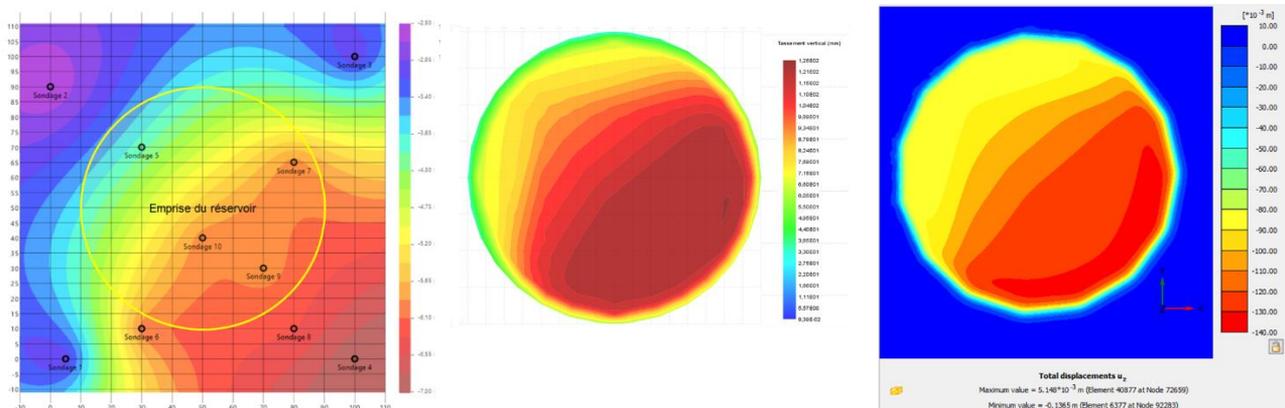


Figure 4. Exemple d'un réservoir circulaire : à gauche variation de l'épaisseur du sol mou, au centre tassement obtenu par Tasseldo+, à droite tassement obtenu par PLAXIS 3D

La figure 4 présente les résultats obtenus : à gauche la variation de l'épaisseur de la couche d'argile au droit du réservoir, au centre le résultat issu de Tasseldo+ (tassement de 12,6 cm), à droite le résultat issu de PLAXIS3D (tassement de 13,6 cm, soit 7 à 8% d'écart).

## 2.4. Traitement de l'élasticité non-linéaire

La mise en œuvre des modèles décrits précédemment nécessite de définir des modules de déformation qui peuvent être, pour une couche donnée, constants (élasticité linéaire) ou variables avec la déformation (élasticité non-linéaire). Pour un comportement élastique linéaire, le module de déformation  $E$  peut être choisi dans la pratique par corrélation avec le module pressiométrique  $E_M$ . Pour une déformation verticale moyenne de l'ordre de 0,1%, il est d'usage de choisir un rapport  $E/E_M$  variant de 3 à 6 selon le type de terrain. En cas d'utilisation d'essais CPT, le rapport  $E/q_c$  peut varier de 3 à 10 pour une déformation de 0,1%. En dehors de cette gamme de déformation, ces corrélations doivent être réadaptées. L'utilisation de l'élasticité non-linéaire permet de faciliter la démarche en s'appuyant préalablement sur des lois de variation du module avec la déformation permettant de d'adapter localement la valeur du module  $E$  (au droit de chaque point de calcul et au niveau de chaque couche). A cet effet, les développements menés dans le cadre du projet national ARSCOP ont permis de mettre au point des courbes en S empiriques donnant le rapport  $E/E_M$  en fonction de la déformation verticale (Hoang et al., 2028, Hoang et al. 2020) telles que celles rappelées dans la figure ci-dessous (où les courbes de type 1 s'appliquent aux terrains sableux, le type 3 aux terrains argileux et le type 2 aux terrains intermédiaires).

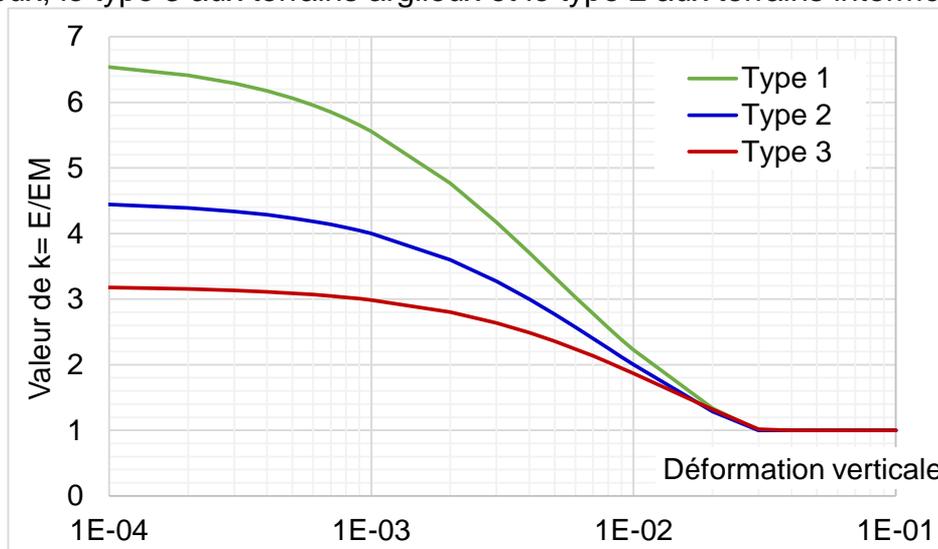


Figure 5 : Rapport  $E/E_M$  en fonction de la déformation verticale (Hoang et al., 2020)

## 3. Intégration dans un modèle hybride

### 3.1. Traitement de la consolidation

On considère le cas d'un sol fin saturé soumis à un chargement extérieur. Avant chargement, le sol est supposé en état d'équilibre. Les contraintes totales et effectives en un point  $M$  quelconque correspondent au poids des terres respectivement saturées et déjaugées, soit  $\sigma_0$  et  $\sigma'_0$ . La pression interstitielle est égale à la pression hydrostatique au point  $M$  considéré, soit  $u_0$ . L'application d'un groupe de charges sur le massif a pour conséquence la modification des contraintes au point  $M$ . À un instant  $t$  quelconque :

- Variation de la pression interstitielle :  $\Delta u$ ,
- Variation de la contrainte totale :  $\Delta \sigma_{zz}$ ,
- Variation de la contrainte effective :  $\Delta \sigma'_{zz} = \Delta \sigma_{zz} - \Delta u$ .

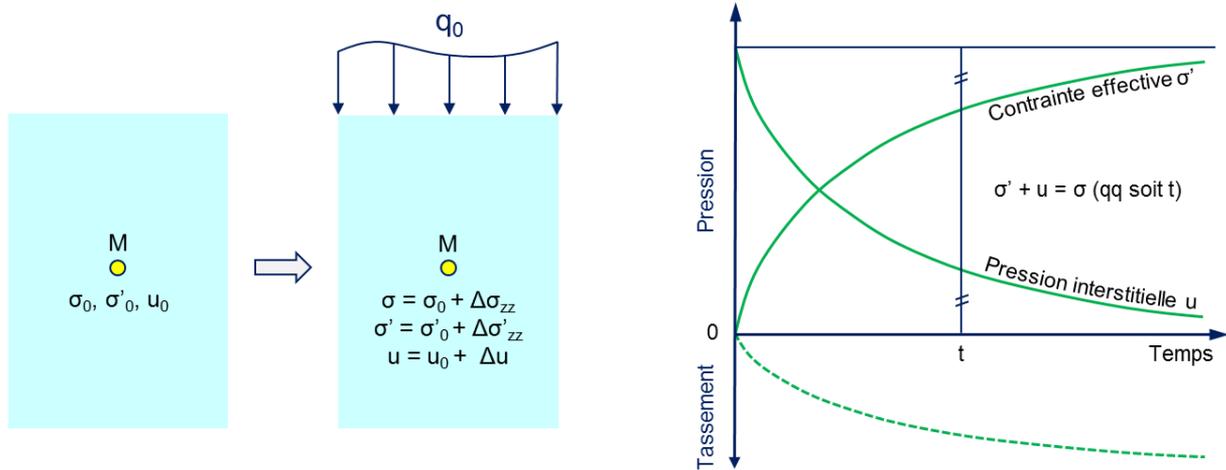


Figure 6. Théorie de consolidation

Au début du chargement ( $t = 0$ ), l'eau considérée comme incompressible supporte toute la pression et on retrouve donc  $\Delta u = \Delta \sigma_{zz}$  et  $\Delta \sigma'_{zz} = 0$ . Pendant le chargement, la surpression interstitielle diminue progressivement ( $\Delta u < \Delta \sigma_{zz}$ ), la contrainte effective et le tassement augmentent. À l'infini,  $\Delta \sigma'_{zz} = \Delta \sigma_{zz}$  et  $\Delta u = 0$ . La figure ci-dessus représente schématiquement l'évolution des contraintes effective et interstitielle en fonction du temps dans le cadre d'un mécanisme de consolidation.

La simulation de ce mécanisme de consolidation peut être menée de façon simplifiée à l'aide d'un modèle hybride en combinant les solutions analytiques présentées en §2 avec une solution numérique 1D pour l'évolution de la surpression interstitielle avec le temps (au droit d'un point de calcul donné et considérant le profil stratigraphique associé). La solution numérique exploitée permet de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( c_v \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} \right)$$

Où  $c_v$  est le coefficient de consolidation verticale (définie par couche).

La formulation numérique utilisée est une formulation mixte en éléments finis pour l'espace  $z$  (éléments à deux nœuds et deux degrés de liberté) et en différences-finies pour le temps  $t$  (schéma implicite de 1<sup>er</sup> ordre). La mise en œuvre du modèle permet d'établir un système matriciel équivalent dont la résolution conduit au profil de  $\Delta u(z, t)$  en chaque point et à chaque instant.

Le couplage avec la solution généralisée de Boussinesq peut ensuite être mené de deux façons :

- Couplage en contraintes :

$$\Delta \sigma'(z, t) = \Delta \sigma(z) - \Delta u(z, t)$$

Les déplacements sont ensuite calculés à partir de l'incrément de contrainte  $\Delta \sigma'(z, t)$ .

- Couplage en déplacements (correspondant à la pratique usuelle) :

$$u(z, t) = u(z, t = \infty) \left( 1 - \frac{\Delta u(z, t)}{\Delta \sigma(z)} \right)$$

La valeur de  $u(z, t = \infty)$  correspond au tassement obtenu en l'absence de consolidation (également appelé tassement final).

### 3.2 Interaction sol-radier – lien avec le modèle Tasplaq

En présence d'un radier ou d'un dallage, la distribution des contraintes transmises au sol sont fonction de la rigidité relative de l'élément de fondation par rapport au sol. Il s'agit d'un problème complexe qui a fait l'objet de nombreux développements dans le passé et qui peut être traité de façon simplifiée en assimilant le sol à une distribution de ressorts surfaciques. Une approche plus élaborée, tout en évitant le recours à des traitements numériques complets en trois dimensions, peut être obtenue par un modèle hybride qui combine une solution analytique pour le terrain (en exploitant les développements présentés précédemment) et une solution numérique par éléments finis de plaque pour la fondation. Le principe de ce modèle hybride, dénommé Tasplaq, a été décrit d'une manière détaillée par (Cuira et Simon, 2008) et est rappelé sur la figure suivante.

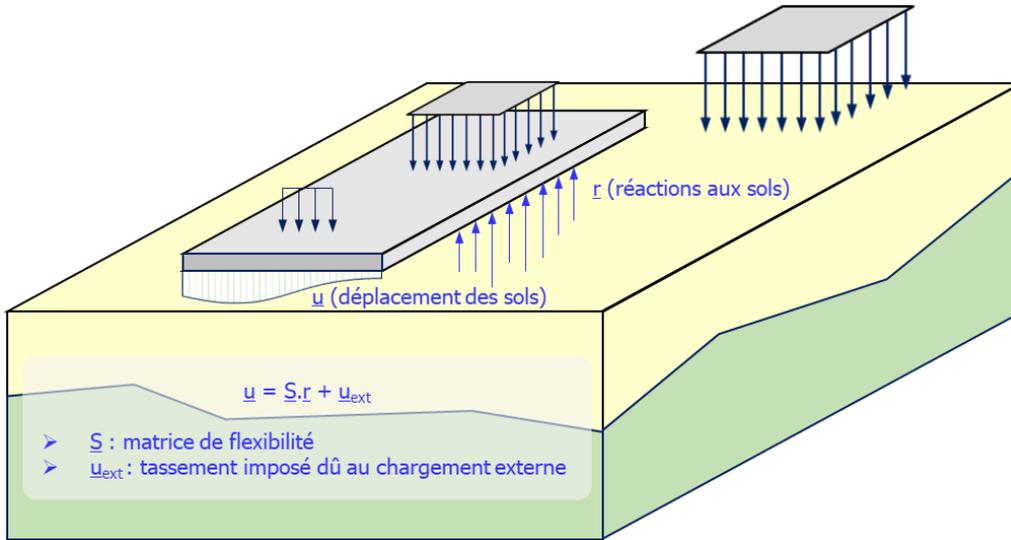


Figure 7. Principe de calcul d'un radier sous chargement quelconque

Dans le cadre de ce modèle, la réponse du sol en interaction avec la fondation est entièrement décrite par une matrice de souplesse ou de flexibilité dont les composantes sont obtenues en exploitant directement les solutions de Boussinesq décrites précédemment. Cette matrice, notée  $\underline{\underline{S}}$  de taille  $(n \times n)$ , décrit par exemple la relation entre la réaction verticale  $\underline{r}$  sous la base du radier en  $n$  points du maillage et le tassement  $\underline{u}$  de ces mêmes points :

$$\underline{u} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{r} + \underline{u}_{\text{ext}}$$

Où  $\underline{u}_{\text{ext}}$  désigne le tassement extérieur lié à des charges autres que celles transmises par le radier. Cette matrice de flexibilité, obtenue à l'aide d'un modèle de type « Tasseldo+ », est ensuite utilisée comme donnée d'entrée au modèle Tasplaq.

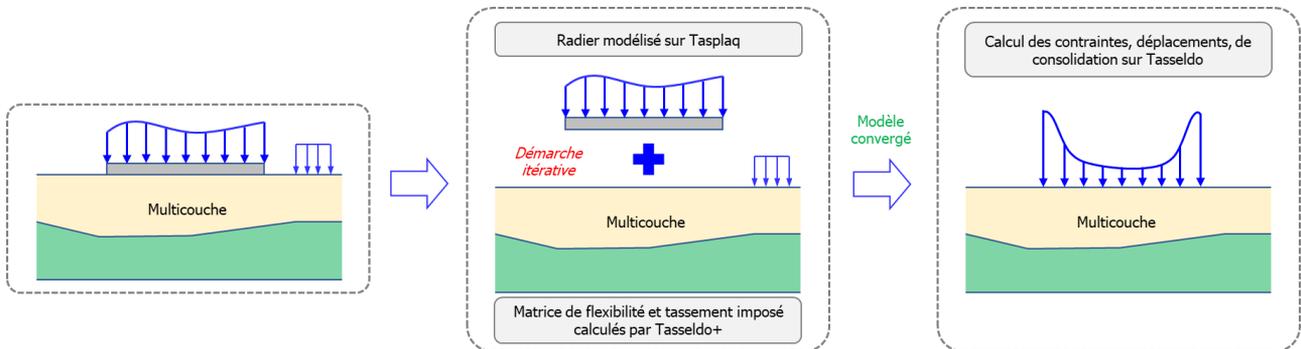


Figure 8. Principe de couplage Tasplaq/Tasseldo+

#### 4. Exemple d'application

L'exemple ci-dessous illustre l'application de Tasseldo+ et de Tasplaq dans la justification d'un grand radier d'une centrale nucléaire fondée sur un complexe stratigraphique variable. Le radier est discrétisé en éléments finis triangulaires. Le terrain est supposé de comportement élastique non-linéaire avec une loi de variation  $E/E_M$  de type ARSCOP (figure 5). La couche d'argile est supposée de comportement différencié. L'étude du radier nécessite donc de répondre à trois problèmes : le caractère variable de la stratigraphie rencontrée, le caractère non-linéaire du terrain et le problème de consolidation des terrains argileux. Le couplage Tasplaq/Tasseldo+ répond aux problèmes posés.

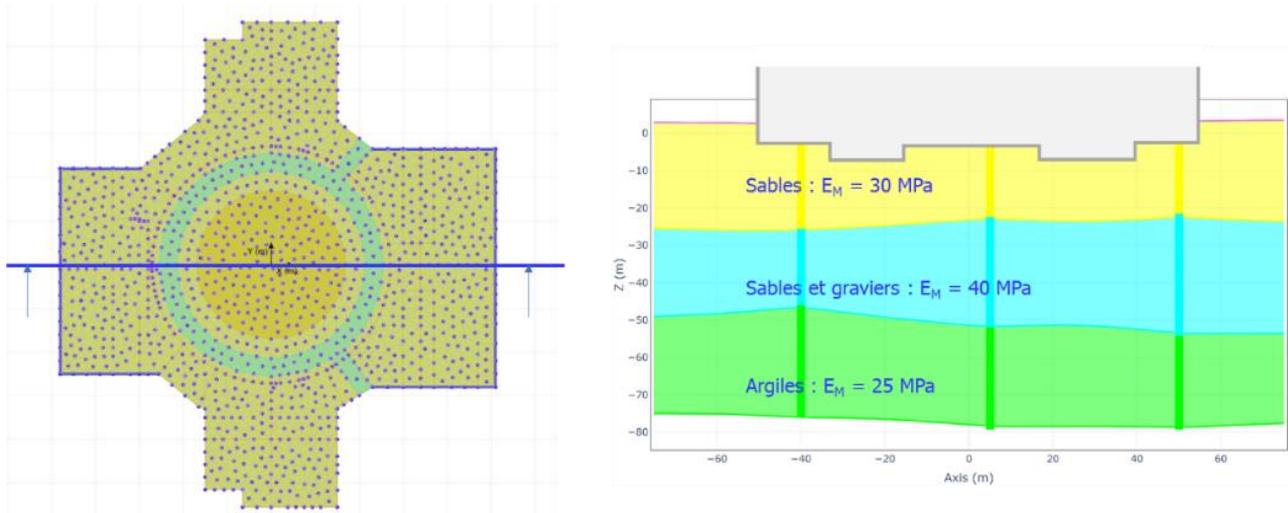


Figure 9. Modèle du radier (gauche) et modèle stratigraphique (droite)

La réponse du massif du sol est représentée par une matrice de flexibilité calculée à l'aide de Tasseldo+ et ajustée itérativement (tenant compte de la variation des modules avec le niveau de déformation). L'introduction de cette matrice de souplesse dans Tasplaq permet d'aboutir ensuite à la cuvette de tassement représentée sur la figure suivante.

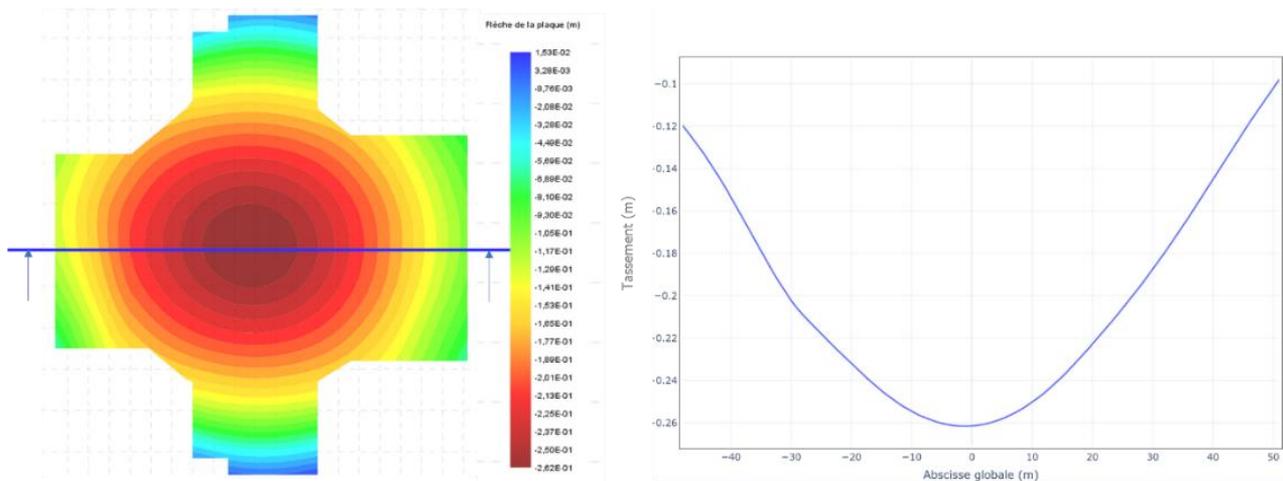


Figure 10. Cuvette de tassement à la dernière itération

A partir de la distribution des réactions établies à la dernière itération, un modèle hybride consolidation-Boussinesq (§3.1) permet d'établir l'évolution des surpressions interstitielles et des tassements avec le temps. Pour un coefficient de consolidation de  $5 \times 10^{-6}$  ( $m^2/s$ ), la consolidation est achevée au bout de 3 ans (Figure 11). L'attention est attirée sur le fait que le coefficient de consolidation n'est pas une propriété intrinsèque du terrain et qu'il varie proportionnellement avec le module de déformation du terrain. Ainsi plus le niveau de

déformation est faible, plus le module de déformation est élevé et plus la consolidation est rapide. En particulier, il n'est pas toujours pertinent d'utiliser directement les coefficients de consolidation issus des essais oedométriques qui sont souvent réalisés pour des niveaux de déformation (1% à 10%) bien plus élevés que ceux qui intéressent les problèmes de fondation (de l'ordre de 0,1%).

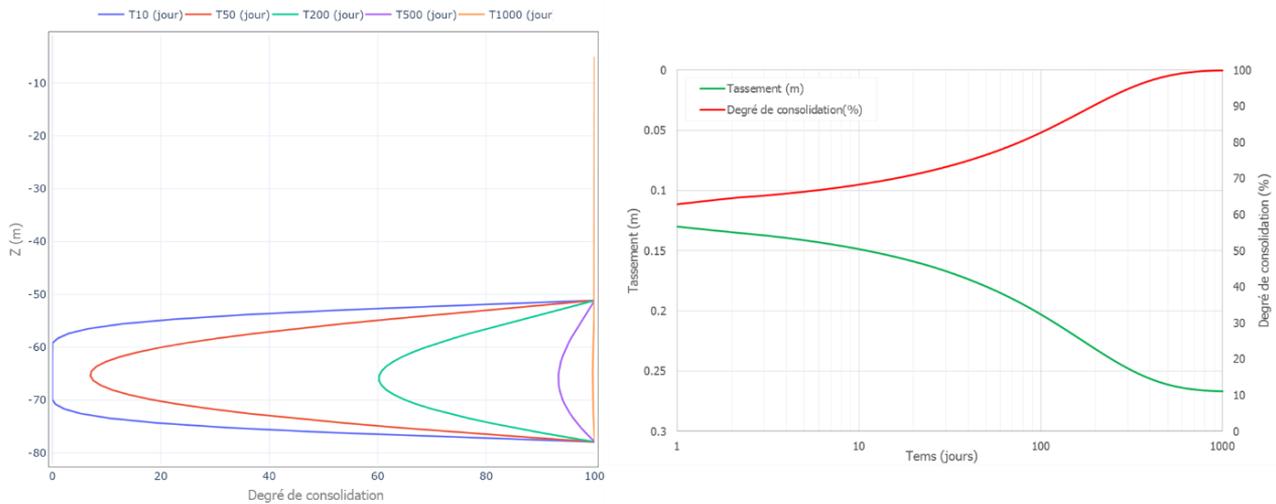


Figure 11. Evolution de tassement et de consolidation dans le temps

## 5. Conclusions et perspectives

Les développements présentés permettent d'étendre le domaine d'application des solutions analytiques usuelles à des configurations complexes, souvent réputées être réservées à des traitements numériques par éléments finis ou différences finies. Le résultat de ces développements s'est déjà révélé utile dans plusieurs projets d'immeubles de grande hauteur, de centrales nucléaires et de réservoirs hydrauliques. Le travail se poursuit avec les groupes de pieux en exploitant de façon approfondie les solutions de Mindlin.

## 6. Références bibliographiques

- Burland, J. B., Broms, B. B. & De Mello, V. F. B. 1977, Behaviour of foundations and structures, Proceedings 9th ICSMFE, Tokyo, Japan, Vol. 4:495-546.
- Cuira F., Simon B., 2008, Modélisation 3D simplifiée d'une plaque sur sol multicouche élastique
- Frank R., Cuira F., Burlon S., 2019, Calcul des fondations superficielles et profondes, Presses des ponts (livre).
- Hoang, M.T., Cuira, F. et Burlon, S. (2020). Vers une approche de calcul unifiée du tassement des semelles et des radiers, JNGG 2020.
- Hoang, M.T., Cuira, F., Dias D., Miraillet P. (2018). Estimation du rapport  $E/E_M$  pour les radiers de grandes dimensions, JNGG 2018
- Terzaghi, K. 1943, Theoretical soil mechanics, New York, John Wiley and Sons, 376-382.